foto

Profesor:
Fortunato Mendoza

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

PITAGORAS
ACADEMIA

RAZONES, PROPORCIONES Y PROMEDIOS

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN

Es la comparación que se puede establecer entre dos cantidades.

En general:

Sean las cantidades a y b

Razón aritmética	Razón geométrica
$a - b = r$	$\frac{a}{b} = k$

donde:

a: antecedente

b: consecuente

r: valor de la razón aritmética

k: valor de la razón geométrica

RAZONES Y PROPORCIONES

NOTAS:

1) Las edades de José y María son 42 y 14 años respectivamente

Comparando por sustracción

$$42 - 14 = 28$$

Se afirma:

La edad de José excede a la edad de María en 28 años.

José tiene 28 años más que María.

RAZONES Y PROPORCIONES

2) En una aula estudian 24 hombres y 36 mujeres;

Sea: # de hombres: H
de mujeres : M

Comparando por división: $\frac{H}{M} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Se lee:

El número de hombres es al número de mujeres como 2 es a 3

La relación entre el número de hombres y mujeres es de 2 a 3.

El número de hombres y el número de mujeres son entre si como 2 es a 3

Por cada 2 hombres hay 3 mujeres.

RAZONES Y PROPORCIONES

Ejercicio 1

Las edades de Ángel y Romina son entre sí como 12 es a 5 y hace 5 años la razón aritmética de sus edades era 28 años. ¿Cuántos años tendrá Romina dentro de 5 años?

Resolución:

	5 años		5 años
	Pasado	Presente	Futuro
Ángel		12 x4	
Romina		5 x4	25
	28	7 x4	

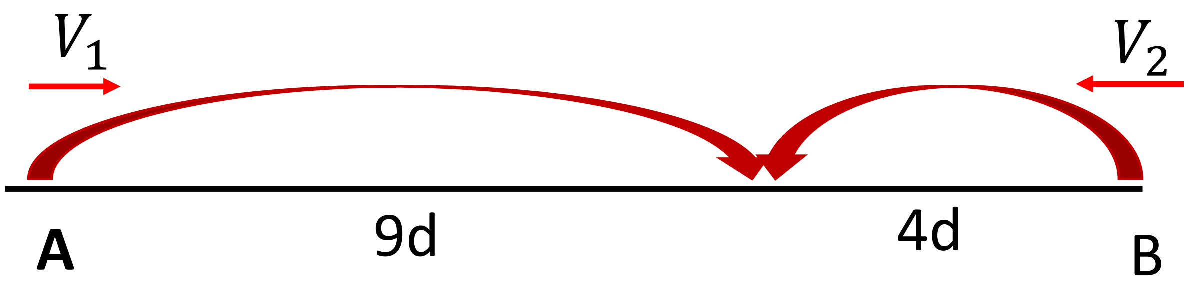
Por lo tanto Romina dentro de 5 años tendrá: $20 + 5 = 25$

Rpta: 25 años

Ejercicio 2

Dos móviles parten en el mismo instante, uno de «A» y otro de «B» y marchan al encuentro uno del otro; si la velocidad del primero excede en 20 km/h al segundo. Determinar dichas velocidades, si la razón de los espacios recorridos por ambos móviles hasta su encuentro es de 9/4. Dar la mayor de ellas en km/h

Resolución:



Dato: $V_1 - V_2 = 20$ ....(1)

Se cumple:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{9d}{4d} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{4} \rightarrow \begin{cases} V_1 = 9k \\ V_2 = 4k \end{cases}$$

En (1): 5k = 20 $\rightarrow$ k = 4

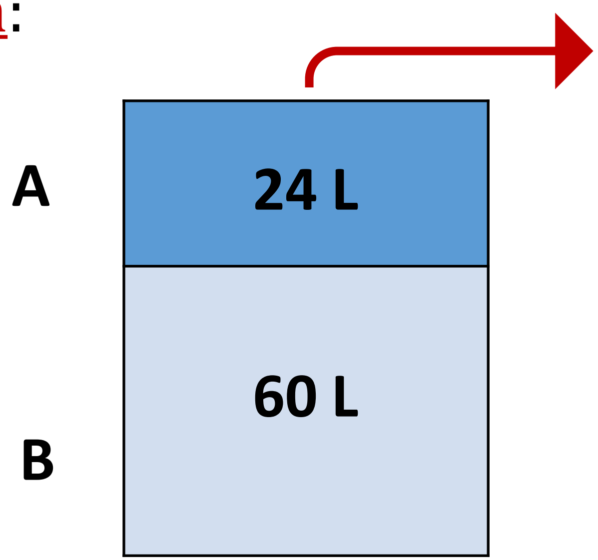
Piden: $V_1 = 9(4)$ = 36

Rpta: 36 Km/h

Ejercicio 3

Se mezcla 24 litros de un líquido ''A'', con 60 litros de otro líquido ''B''. Si se extrae 28 litros de dicha mezcla y son reemplazados por el líquido ''A''. Halle la relación final de los líquidos ''A'' y ''B'' que se encuentran en la mezcla.

Resolución:



28 L $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{A:}\ 2 * 4 = 8\ \text{L} \\ \textbf{B:}\ 5 * 4 = 20\ \text{L} \end{array} \right.$

$7 * 4$

Obs: $\dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5}$

Queda

A = 16 + 28 = 44 L

B = 40

Piden: $\dfrac{44}{40} = \dfrac{11}{10}$

Rpta: 11 a 10

PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones de la misma clase y que tienen el mismo valor

1. Proporción aritmética
Es aquella que se forma al igualar dos razones aritméticas.

$$\boxed{a - b = c - d}$$

donde:
a y d : términos extremos
b y c : términos medios

RAZONES Y PROPORCIONES

Ejemplo: 5 - 2 = 7 - 4
Observación: 5 + 4 = 7 + 2

Se cumple:

(Suma de extremos)=(Suma de medios)

En general, una **proporción aritmética** puede ser de 2 tipos:

Discreta	Continua
a - b = c - d donde: d: cuarta diferencial de a; b y c	a - b = b - c donde: c : tercera diferencial de a y b b : media diferencial de a y c

RAZONES Y PROPORCIONES

2. Proporción geométrica

Es aquella que se forma al igualar dos razones geométricas.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

donde:

a y d : términos extremos
b y c : términos medios

Ejemplo:

$$\frac{6}{2} = \frac{15}{5}$$

Observación:

$$6 \times 5 = 15 \times 2$$

Se cumple:

(Producto de extremos) = (Producto de medios)

RAZONES Y PROPORCIONES

En general, una **proporción geométrica** puede ser de 2 tipos:

Discreta	Continua
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ Donde: d: cuarta proporcional de a, b y c	$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ Donde: b: media proporcional de a y c c: tercera proporcional de a y b

Propiedades:

1. Dada la proporción: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$

   Entonces: $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d} = k$

2. Dada la proporción: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

   Entonces: $\begin{cases} \dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d} \\ \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d} \end{cases}$

Ejercicio 4

En una proporción geométrica se sabe que el producto de extremos es 600. Si los términos medios son consecutivos, ¿cuál es la suma de los términos medios?

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ➡ ad = bc

a * d = 600 ➡ bc = 600

b - c = 1

Observación: b = 25 ; c = 24

Piden: b + c = 49

Rpta: 49

Ejercicio 5

En una proporción geométrica continua de constante entera, la suma de términos es 150. Calcule la diferencia de los extremos.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ $\left\{ \begin{array}{l} a = ck^2 \\ b = ck \end{array} \right.$

a + 2b + c = 150

$ck^2 + 2ck + c = 150$

$c(k+1)^2 = 6 * 5^2$ ➡ c = 6 ; k = 4

Reemplazando: $a = 6 * 4^2$ ➡ a = 96

Piden: a – c = 90

Rpta: 90

Serie de razones geométricas equivalentes (S.R.G.E.)
Es llamado así al conjunto de razones geométricas, que en común van a tener un mismo valor.

Ejemplo:

$$\frac{18}{6} = \frac{12}{4} = \frac{21}{7} = 3$$

RAZONES Y PROPORCIONES

En general:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots\dots\dots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Donde:

$a_1;\ a_2 \dots\dots;a_n$: antecedentes

$b_1;\ b_2 \dots\dots;b_n$: consecuentes

K : constante de proporcionalidad

Se cumplen las siguientes propiedades:

i) $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots + b_n} = k$$

ii) $$\frac{a_1 . a_2 . a_3 . \dots\dots . a_n}{b_1 . b_2 . b_3 . \dots\dots . b_n} = k^n$$

Serie de razones geométricas continuas equivalentes

Ejemplo:

$$\frac{64}{32} = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = 2 \ldots (\text{S.R.G.E.continuas})$$

Observación:
Los medios consecutivos son iguales

Ejemplos

Para 3 razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = dk^3 \\ b = dk^2 \\ c = dk \end{cases}$$

también:

$$\frac{dk^3}{dk^2} = \frac{dk^2}{dk} = \frac{dk}{d} = k$$

Para 4 razones:

$$\frac{dk^4}{dk^3} = \frac{dk^3}{dk^2} = \frac{dk^2}{dk} = \frac{dk}{d} = k$$

Ejercicio 6

La suma, diferencia y el producto de dos números está en la misma relación que los números 5; 1 y 36. Halle el menor.

Resolución:

Sean los números a y b

Por dato:

$$\frac{a+b}{5} = \frac{a-b}{1} = \frac{ab}{36} = k$$

Se cumple:

$a + b$ = 5k ....(1)

$a - b$ = k ....(2)

ab = 36k .....(3)

(1) Y (2): 2a = 6k ➡ a = 3k

En (1) b = 2k

En (3) (3k)(2k) = 36k ➡ K = 6

Piden b = 2(6) = 12

Rpta: 12

RAZONES Y PROPORCIONES

Ejercicio 7

Si se tiene $\frac{p^2}{12} = \frac{q^2}{27} = \frac{r^2}{48} = \frac{s^2}{147}$ y (p + s) – (q + r) = 36. Halle (p + q + r + s).

Resolución:

De la serie

$$\frac{p^2}{12} = \frac{q^2}{27} = \frac{r^2}{48} = \frac{s^2}{147}$$

Simplificando los consecuentes:

$$\frac{p^2}{4} = \frac{q^2}{9} = \frac{r^2}{16} = \frac{s^2}{49}$$

Sacando raíz cuadrada:

$$\frac{p}{2} = \frac{q}{3} = \frac{r}{4} = \frac{s}{7} = k \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 2k \\ q = 3k \\ r = 4k \\ s = 7k \end{array} \right.$$

Por dato: (p + s) – (q + r) = 36

9k – 7k = 36

2k = 36 ⇒ K = 18

Piden

p + q + r + s = 16k = 16(18) = 288

Rpta: 288

PROMEDIOS

Sean las cantidades: $a_1;\ a_2 \ldots \ldots;a_n$

1. Promedio o Media Aritmética (MA)

$$M.A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

2. Promedio o Media Geométrica (MG)

$$M.G = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_n}$$

3. Promedio o Media Armónica (MH)

$$M.H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Caso particular:

Para dos datos: a y b

$$MA = \frac{a + b}{2}$$

$$MG = \sqrt{ab}$$

$$MH = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow MH = \frac{2ab}{a + b}$$

PROMEDIOS

Propiedades:

1. Si todos los datos son iguales:

$$\boxed{\mathrm{MH} = \mathrm{MG} = \mathrm{MA}}$$

2. Si todos los datos no son iguales:

$$\boxed{(\text{Menor dato}) < MH < MG < MA < (Mayor\ dato)}$$

3. Solo para dos números a y b:

$$\boxed{\mathrm{MH} * \mathrm{MA} = MG^2}$$

También:

$$\boxed{(a-b)^2 = 4\,(MA + MG)(MA\ - MG)}$$

Ejercicio 8

El promedio de las edades de 4 personas de edades diferentes es 34. Si nadie es menor de 26 años ¿Cuál es la máxima edad que una de las personas puede tener?

Resolución:

Sean las edades A, B, C , D ≥ 26

A $\neq$ B $\neq$ C $\neq$ D

$$\frac{A + B + C + D}{4} = 34 \Rightarrow \underset{\text{máximo}}{A} + \underbrace{B + C + D}_{\text{mínimo}} = 136$$

Como B, C y D son diferentes

$$A + 26 + 27 + 28 = 136 \Rightarrow A_{máximo} = 55$$

Rpta: 55

Ejercicio 9

La media geométrica de cuatro números enteros y diferentes es $11\sqrt{11}$. Determine el promedio aritmético de dichos números.

Resolución:

Sean los números A, B, C , D

A ≠ B ≠ C ≠ D

Por dato: $\sqrt[4]{ABCD} = 11\sqrt{11}$ ➡ $ABCD = 11^4 * 11^2$ ➡ $ABCD = 11^6$

Como A, B, C y D son diferentes, entonces
11^6 *lo expresaremos como el producto de cuatro factores diferentes*

ABCD = $(11^1)(11^2)(11^3)(1)$ ➡ A= 11 ; $B = 121$; C = 1331 ; D = 1

Piden: $\dfrac{A + B + C + D}{4} = 366$

Rpta: 366

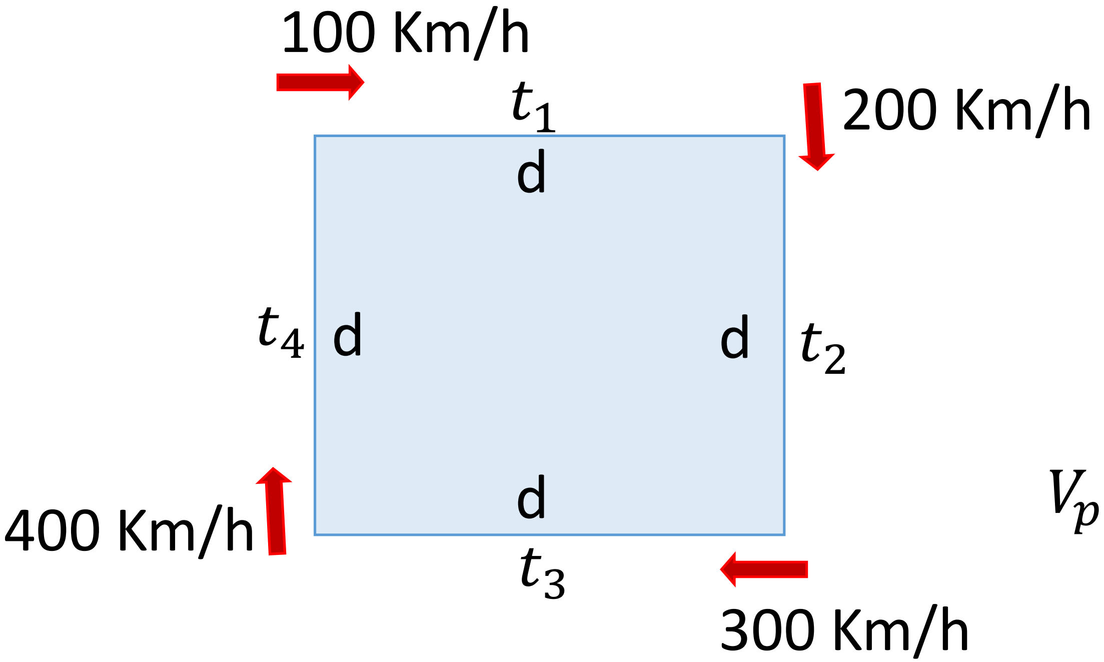
PROMEDIOS

Ejercicio 10

Sabiendo que un OVNI sobrevoló un terreno cuadrado por cada uno de sus lados a velocidades increíbles de 100 km/h; 200Km/h; 300Km/h y 400 Km/h, luego de lo cual desapareció sin dejar rastro. ¿Cuál es la velocidad promedio sobre su recorrido que desarrolló el OVNI?.

Resolución:

Recorrido del OVNI:



Piden:

$$V_p = \frac{Recorrido\ total}{Tiempo\ total} = \frac{4d}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$$

$$V_p = \frac{4d}{\frac{d}{100} + \frac{d}{200} + \frac{d}{300} + \frac{d}{400}}$$

$$V_p = \frac{4}{\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \frac{1}{400}} \Rightarrow V_p = 192$$

Rpta: 192 Km/h

PROBLEMAS

1. Si:

$$\frac{a+8}{b+24}=\frac{b}{16-b}=\frac{25-a}{31-b}$$

Calcular: a + b

Resolución:

$$+$$

$$\frac{a+8}{b+24}=\frac{b}{16-b}=\frac{25-a}{31-b}=\frac{33}{55}=\frac{3}{5}$$

$$+$$

$$\frac{b}{16}=\frac{3}{8} \Rightarrow b=6$$

$$\frac{a+8}{30}=\frac{3}{5} \Rightarrow a = 10$$

Por lo tanto

a + b = 16

Rpta: 16

PROBLEMAS

2. Se sabe que M es la tercera proporcional de 81 y 9; A es la media proporcional de 512 y 2; y R es la cuarta proporcional de 56; 7 y 64. Calcular la cuarta diferencial de A; 3R Y 15M.

Resolución:

$$\frac{81}{9} = \frac{9}{M} \Rightarrow M = 1$$

$$\frac{512}{A} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 32$$

$$\frac{56}{7} = \frac{64}{R} \Rightarrow R = 8$$

Piden la cuarta diferencial de 32; 24 y 15

$$32 - 24 = 15 - X \Rightarrow X = 7$$

Rpta: 7

PROBLEMAS

3. En una proporción se cumple que la suma de los términos medios es 19 y la de los extremos es 21. Si la suma de los cuadrados de sus términos es 442, calcular la diferencia de los términos extremos.

Resolución:

$Sea\ la\ proporción: \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ➡ $ad = bc$

b + c = 19 ➡ $b^2 + c^2 + 2bc = 361 \ldots \ldots (1)$

a + d = 21 ➡ $a^2 + d^2 + 2ad = 441 \ldots \ldots (2)$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 442$

$(1) + (2)$ ➡ $442 + 4\mathrm{bc} = 802$

Resolviendo: bc = 90

ad = 90 ➡ a = 15; d = 6

Piden a – d = 9 **Rpta: 9**

PROBLEMAS

4. En una fábrica el personal esta distribuido en tres secciones: A, B Y C. La cantidad de personas del grupo A es a la de B como 2 es a 5, mientras que la de B es a la de C como 3 es a 7. Si se retiran cierta cantidad de personas de cada sección en la relación de 3; 6 y 8, respectivamente, quedan en la relación de 20; 57 y 161. ¿Qué fracción del total se retiraron?

Resolución:

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{5}*\frac{3}{3}=\frac{6}{15}$$

$$\frac{B}{C}=\frac{3}{7}*\frac{5}{5}=\frac{15}{35}$$

A = 6k

B= 15k

C = 35k

Se retiran de: A; B Y C

respectivamente 3n; 6n y 8n

Por dato

$$\underbrace{\frac{6k-3n}{20}=\frac{15k-6n}{57}}=\frac{35k-8n}{161}$$

$$14k=17n \Rightarrow \frac{n}{k}=\frac{14}{17}$$

Piden $\frac{17n}{56k}=\frac{17}{56}*\frac{14}{17}=\frac{1}{4}$

Rpta: $\mathbf{\frac{1}{4}}$

PROBLEMAS

5. En cierta universidad la probabilidad de ingreso es como 1 es a 10; si se incrementa en 20 el número de vacantes dicha probabilidad de ingreso sería como 1 es a 9. ¿En cuántas vacantes se debe incrementar el número inicial de vacantes para que la probabilidad inicial de ingreso aumente en 50%?

Resolución:

Sea V el número de vacantes

P el número de postulantes

$$\frac{V}{P} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10V = P$$

$$\frac{V+20}{P} = \frac{1}{9} \Rightarrow 9V + 180 = P$$

Resolviendo V = 180 ; P = 1800

Sea X el incremento del número inicial de vacantes

$$\frac{180+X}{1800} = \frac{150}{100}\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow X = 90$$

Rpta: 90

PROBLEMAS

6. La siguiente proporción: $\frac{m}{p} = \frac{p}{n} = k$;cumple con que sus términos y la constante "k" son enteros positivos, siendo k < n < p < m.
Además:

$$m^2 - p^2 + n^2 = 1296\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{m^2}\right)$$

Calcular el valor de: p + k

Resolución:

$$\frac{m}{p} = \frac{p}{n} = k \Rightarrow \begin{cases} p = nk \\ m = nk^2 \end{cases}$$

$$k < n < p < m$$

$$m^2 - p^2 + n^2 = 1296\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{m^2}\right)$$

$$\cancel{m^2 - p^2 + n^2} = 1296\left(\frac{\cancel{m^2 - p^2 + n^2}}{n^2 * m^2}\right)$$

$nm = 36 \Rightarrow p^2 = 36 \Rightarrow$ p= 6

Luego n . k = 6

Obs: k = 2 ; n= 3 ; m = 12

Rpta: p + k = 8

PROBLEMAS

7. Sabiendo que:

$$\frac{60+a}{60-a}=\frac{100+b}{100-b}=\frac{240+c}{240-c}=k$$

a + b + c + 1 = k^2 ; además, $sea\ el\ conjunto\ P=\{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{k+1}\}$ **de "k+1" elementos que son enteros positivos y diferentes entre sí tales que ninguno es menor o igual que "k", calcular el mínimo valor que puede tomar el promedio aritmético de los elementos de P.**

Resolución:

Se tiene

$$\frac{60+\mathrm{a}}{60-\mathrm{a}}=\frac{100+\mathrm{b}}{100-\mathrm{b}}=\frac{240+\mathrm{c}}{240-\mathrm{c}}=\frac{K}{1}$$

$$a+b+c=k^2-1$$

De la serie:

$$\frac{60}{\mathrm{a}}=\frac{100}{\mathrm{b}}=\frac{240}{\mathrm{c}}=\frac{k+1}{k-1}$$

$$\frac{400}{\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}}=\frac{\mathrm{k}+1}{\mathrm{k}-1} \Rightarrow \frac{400}{k^2-1}=\frac{k+1}{k-1}$$

Resolviendo k = 19

PROBLEMAS

7. Sabiendo que:

$$\frac{60+a}{60-a}=\frac{100+b}{100-b}=\frac{240+c}{240-c}=k$$

a + b + c + 1 = k^2 ; además, $\boldsymbol{sea\ el\ conjunto\ P=\{a_1;\ a_2;\ \ldots\ldots;\ a_{k+1}\}}$ **de "k+1" elementos que son enteros positivos y diferentes entre sí tales que ninguno es menor o igual que "k", calcular el mínimo valor que puede tomar el promedio aritmético de los elementos de P.**

$$\mathrm{P}=\{\mathrm{a}_1;\ \mathrm{a}_2;\ \ldots\ldots;\ \mathrm{a}_{\mathrm{k}+1}\}$$

$$\mathrm{a}_1;\ \mathrm{a}_2;\ \ldots\ldots;\ \mathrm{a}_{20}>19$$

$$\mathrm{a}_1\neq\ \mathrm{a}_2\neq\mathrm{a}_3\neq\cdots\ldots\neq\mathrm{a}_{20}$$

Promedio aritmético mínimo

$$\mathrm{MA}=\frac{20+21+22+\ \ldots\ldots+39}{20}$$

$$\mathbf{MA=29,5}$$

Rpta: 29,5

PROBLEMAS

8. Se tiene una proporción geométrica de términos enteros mayores que la unidad donde el producto de sus consecuentes es 35 y uno de los antecedentes es la razón aritmética del primer y último término de una serie de razones aritméticas continuas, donde la suma de sus antecedentes excede a la suma de sus consecuentes en 10. Calcular el otro antecedente de la proporción geométrica.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ......(1)

$a\,;b\,;c\,;d > 1$

$\mathrm{bd} = 35$

$$\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 = \mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_3 = \mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_4 = \ldots\ldots = \mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1}$$

Dato: $\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = a$

$$(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n}) - (\mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1}) = 10$$

$\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = 10 \Rightarrow a = 10$

$En\ (1)\ \frac{10}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow b = 5; d = 7$

$c = 14$

Rpta: 14

9. A un festival deportivo concurrió el público de la siguiente manera:

- **2 hombres adultos por cada 3 señoritas, y 2 señoras por cada señorita.**
- **Cada 3 señoras entraban con 5 niños.**
- **Cada 2 señoritas entraban con 7 niños.**
- **Cada 4 hombres adultos entraban con 8 niños.**
- **Cada 7 niños entraba con 1 mascota.**
- **Las señoras, señoritas y hombres adultos entraban por puertas diferentes.**
- **Al final se contaron 160 personas entre mujeres casadas y hombres adultos.**

¿Cuántos eran entre niños y señoritas? y ¿cuántas las mascotas

Resolución:

$Hombres$	$Señoritas$	$Señoras$
$2 * 2$	$3 * 2$	
	$1 * 6$	$2 * 6$
$4k$	$6k$	$12k$

$Niños$: $8k$ $21k$ $20k$

Niños= $49k$

Mascotas= 7k

EJERCICIOS

9. A un festival deportivo concurrió el público de la siguiente manera:

- **2 hombres adultos por cada 3 señoritas, y 2 señoras por cada señorita.**
- **Cada 3 señoras entraban con 5 niños.**
- **Cada 2 señoritas entraban con 7 niños.**
- **Cada 4 hombres adultos entraban con 8 niños.**
- **Cada 7 niños entraba con 1 mascota.**
- **Las señoras, señoritas y hombres adultos entraban por puertas diferentes.**
- **Al final se contaron 160 personas entre mujeres casadas y hombres adultos.**

¿Cuántos eran entre niños y señoritas? y ¿cuántas las mascotas

$$Dato: \quad \underline{Señoras + Hombres} = 160$$

$$16k = 160 \Rightarrow k = 10$$

$$\text{Piden Niños} + \text{Señoritas} = 55\text{k} = 550$$

$$\text{Mascotas} = 7\text{k} = 70$$

Rpta: 550 y 70

10. En una encuesta realizada a un grupo de personas se obtuvo información acerca de la siguiente pregunta: ¿Tienen licencia de conducir?

- **La cantidad de hombres que respondieron "sí" es el doble de la cantidad de mujeres que respondieron "no".**
- **De los que respondieron "sí", los hombres y mujeres están en la relación de 3 a 2.**
- **De los encuestados: la cantidad de hombres es 8/7 de la cantidad de mujeres.**

Calcular la cantidad de encuestados si la cantidad de hombres que dijeron "no" es el menor número que tiene 8 divisores

Resolución:

8k Hombres		7k Mujeres	
Si	No	Si	No
2 *3			1*3
3 *2		2 * 2	
6k	2k	4k	3k

Dato: $CD_{(2k)} = 8$

2k es mínimo ➡ $2k = 2^3 * 3^1$

K = 12

Total: 15k = 15(12) = 180

Rpta: 180

PROBLEMAS

11. Carlos les dice a Sophia y Carmen: "Sus edades hace 6 años estaban en la relación de 7 a 4, respectivamente, y dentro de "n" años la edad de Sophia y la mía estarán en la relación de 13 a 11, respectivamente". Sophia le responde: "Hace 3 años tu edad y la de Carmen estaban en la relación de 6 a 5 respectivamente; además mi edad excede a la de Carmen en 9 años". Calcule la suma de las edades actuales de Carlos; Sophia y Carmen más el valor de "n".

Resolución:

6 años

3 años

n años

	Pas	Pas	Pte	Fut
Carlos		6(3)	21	11(3)
Sophia	7(3)	24	27	13(3)
Carmen	4(3)	5(3)	18	30
	3(3)			

$$E_{sof} - E_{car} = 9$$

Obs: n = 33 – 21 ➡ n = 12

Piden: 21 + 27 + 18 + 12 = 78 ➡ **Rpta: 78**

PROBLEMAS

12. En la programación de simulacros de la Academia Pitágoras, se observó que en el primer simulacro la asistencia de los alumnos a los locales "A"; "B" y "C" están en la relación de 3; 5 y 7; en el segundo simulacro en la relación de 7; 8 y 5, respectivamente, y en el tercer simulacro en la relación de 10; 15 y 25, respectivamente. Además se observó que el número total de alumnos que asistieron al local "C" excede al número total de alumnos que asistieron al local "A" en 700. Calcular el total de alumnos que asistieron al simulacro, sabiendo que en cada examen fue el mismo número de alumnos.

Resolución:

	A	B	C	
1^{er} Simulacro	3 *20k	5*20k	7*20k	$\rightarrow \sum = 15$ *20k
2^{do} Simulacro	7 *15k	8*15k	5*15k	$\rightarrow \sum = 20$ *15k
3^{ro} Simulacro	10 *6k	15 *6k	25*6k	$\rightarrow \sum = 50$ *6k
$Total$	$225k$		$365k$	

$Dato$: $365k - 225k = 700 \rightarrow 140k = 700 \rightarrow k = 5$

Piden: 300k = 300(5) = 1500 $\rightarrow$ **Rpta: 1500**

PROBLEMAS

13. En una proporción geométrica la suma de extremos es 36 y la suma de medios es 34. Calcule la diferencia de los medios.

Resolución:

Sea la proporción geométrica $\frac{mx}{my} = \frac{nx}{ny}$

Por dato: $mx + ny = 36 \ldots \ldots (1)$

$my + nx = 34 \ldots \ldots (2)$

Sumando (1) y (2) $m(x + y) + n(x + y) = 70$

$(x + y)(m + n) = 70$

Restando (1) y (2) $m(x - y) - n(x - y) = 2$

$(x - y)(m - n) = 2$

Para $m - n = 1$; $x - y = 2$ $\Rightarrow$ $m + n = 5$; $x + y = 14$

Resolviendo $m = 3$; $n = 2$; $x = 8$; $y = 6$

La proporción sería

$$\frac{24}{18} = \frac{16}{12}$$

Piden: 18 – 16 = 2

Rpta: 2

PROBLEMAS

14. En una serie de 15 razones geométricas equivalentes se observa que la suma de los 5 primeros antecedentes es a la suma de los 10 últimos consecuentes como 2 es a 3; y la suma de los 10 últimos antecedentes es a la suma de los 5 primeros consecuentes como 3 es a 8. Calcular la relación entre la suma de los 5 primeros antecedentes y la suma de los 10 últimos antecedentes.

Resolución:

Sea la serie

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a_{15}}{c_{15}}$$

Por dato:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_5}{c_6 + \cdots + c_{15}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + \cdots + a_5 = 2x \\ c_6 + \cdots + c_{15} = 3x \end{array}$$

$$\frac{a_6 + \cdots + a_{15}}{c_1 + \cdots + c_5} = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{array}{l} a_6 + \cdots + a_{15} = 3y \\ c_1 + \cdots + c_5 = 8y \end{array}$$

Se cumple

$$\frac{a_1 + \cdots + a_5}{c_1 + \cdots + c_5} = \frac{a_6 + \cdots + a_{15}}{c_6 + \cdots + c_{15}} \Rightarrow \frac{2x}{8y} = \frac{3y}{3x}$$

$$x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = 2y$$

Piden: $\dfrac{a_1 + \cdots + a_5}{a_6 + \cdots + a_{15}} = \dfrac{2x}{3y} = \dfrac{2(2y)}{3y} = \dfrac{4}{3}$

Rpta: $\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

PROBLEMAS

15. La media armónica de tres números enteros es igual a 72/7, además su media aritmética es 14 y su promedio geométrico es igual a uno de los números. El menor de los números es:

Resolución:

Sea los números a; b y c

Por dato: $$\frac{3abc}{ab+ac+bc}=\frac{72}{7} \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{a+b+c}{3}=14 \Rightarrow a+b+c=42$$

$$\sqrt[3]{abc}=b \Rightarrow abc=b^3 \Rightarrow ac=b^2$$

En (1) $$\frac{3b^3}{ab+b^2+bc}=\frac{72}{7} \Rightarrow \frac{3b^2}{a+b+c}=\frac{72}{7} \Rightarrow \frac{3b^2}{42}=\frac{72}{7}$$

Resolviendo:

$$b=12 \Rightarrow a+c=30\ ;\ ac=144$$

Observación

$$a=24\ ;\quad c=6$$

Rpta: 6

PROBLEMAS

16. El promedio aritmético de 8 números es 17/8. Calcular el máximo valor que tomaría uno de ellos si se sabe que ninguna de ellas es menor que la semisuma de la menor y la mayor de las siguientes fracciones: 2/3; 6/7; 4/7 y 1/2.

Resolución:

Sea los números: $a_1 ; a_2 ; \dots ; a_8$

Por dato: $\dfrac{a_1+a_2 \dots +a_8}{8} = \dfrac{17}{8}$ ⇒ $a_1 + a_2 \dots + a_8 = 17$

De la fracciones: $\dfrac{2}{3} ; \dfrac{6}{7} ; \dfrac{4}{7} ; \dfrac{1}{2}$

Observación: $\frac{2}{3} = 0.666 \dots ; \frac{6}{7} = 0.857 \dots ; \frac{4}{7} = 0.571 \dots ; \frac{1}{2} = 0.5$

Menor fracción: $\frac{1}{2}$; Mayor fracción: $\frac{6}{7}$

PROBLEMAS

$Semisuma$: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{6}{7}) = \frac{1}{2}(\frac{19}{14}) = \frac{19}{28}$

Por dato: $a_1; a_2; \ldots ; a_8 \geq \frac{19}{28}$

$Como$: $\underset{\downarrow \, max}{a_1} + \underbrace{a_2 \ldots + a_8}_{mínimo} = 17 \Rightarrow a_1 + \left(\frac{19}{28}\right)7 = 17$

Resolviendo: $a_{1_{max}} = \frac{49}{4}$

Rpta: $\frac{49}{4}$

PROBLEMAS

17. Dado un conjunto de “n” números cuya M.A es “p”, si a la tercera parte de ellos se le aumenta “a” unidades a cada uno, a los 3/5 del resto se les aumenta “b” unidades a cada uno y a los restantes se les resta “c” unidades a cada uno, ¿en cuánto varía el promedio?

Resolución:

Por dato: $MA_{(n\#s)} = P$

$$n\#s \begin{cases} \dfrac{n}{3} \rightarrow +a \quad \text{c/u} \\ \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{3}n\right) = \dfrac{2}{5}n \rightarrow +b \quad \text{c/u} \\ \dfrac{4}{15}n \rightarrow -c \quad \text{c/u} \end{cases}$$

Piden variación del promedio

$$\Delta MA = \frac{Variación\ de\ la\ suma}{Cantidad\ de\ números}$$

$$\Delta MA = \frac{a\left(\frac{n}{3}\right) + b\left(\frac{2}{5}n\right) - c\left(\frac{4}{15}n\right)}{n}$$

Operando

$$\Delta MA = \frac{5a + 6b - 4c}{15}$$

PROBLEMAS

18. Para dos números se cumple que su media aritmética es a su media armónica como 16 es a 15. Calcular su media geométrica, sabiendo que la diferencia de cuadrados de dichos números es 144.

Resolución:

Sean los números a y b

Por dato: $\dfrac{\frac{a+b}{2}}{\frac{2ab}{a+b}} = \dfrac{16}{15} \quad \ldots\ldots(1)$

$a^2 - b^2 = 144 \ldots\ldots(2)$

De (1) $\dfrac{(a+b)^2}{4ab} = \dfrac{16}{15} \Rightarrow \dfrac{(a+b)^2}{ab} = \dfrac{64}{15}$

$(a+b)^2 = 64k^2 \Rightarrow a + b = 8k$

$ab = 15k^2$

Observación: $a = 5k$; $b = 3k$

Reemplazando en (2):

$25k^2 - 9k^2 = 144 \Rightarrow K = 3$

Piden:

$\sqrt{ab} = \sqrt{15k^2} = k\sqrt{15} = 3\sqrt{15}$

Rpta: $3\sqrt{15}$

19. Se tiene tres secciones A, B y C de un colegio. El peso promedio de todos los estudiantes, en kilogramos, son 68,4; 71,2 y 67,4, respectivamente. El peso promedio de todos los estudiantes de las secciones A y B es 70 y el número de estudiantes de B excede al de A en 16. Si el peso promedio de todos los estudiantes de las secciones A y C es 67,8, determinar el número de estudiantes de la sección C.

Resolución:

Se tiene:

	Cantidad	Promedio
A	x	68,4
B	x + 16	71,2
C	y	67,4

Peso promedio de A y B : $\dfrac{x(68{,}4) + (x+16)(71{,}2)}{2x + 16} = 70$ ....(1)

PROBLEMAS

Peso promedio de A y C: $\dfrac{x(68{,}4)+(y)(67{,}4)}{x+y} = 67{,}8$..........(2)

De (1) $x = 48$

Reemplazando en (2): $\dfrac{48(68{,}4)+(y)(67{,}4)}{48+y} = 67{,}8$

Resolviendo: $y = 96$

Rpta: 96

PROBLEMAS

20. Si la M.G de un número de 4 cifras y otro de 3 cifras es a la M.A de dichos números como 12 es a 13, calcular la diferencia de ambos números si son los mayores posibles.

Resolución:

Sean los números: A = $\overline{abcd}$

B = $\overline{efg}$

Por dato: $$\frac{\sqrt{AB}}{\frac{A+B}{2}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{\sqrt{AB}}{A+B} = \frac{6}{13} \Rightarrow \sqrt{AB} = 6K \Rightarrow AB = 36k^2$$

A+B= $13K$

Observación: A = 9k

B = 4k

Como A y B son máximos ⇒ K = 249

Piden: A - B = 5K = 5(249) = 1245

Rpta: 1245